

Analisi a rottura - procedimento risolutivo degli esercizi

Modelli costitutivi:

- Calcestruzzo (fig 1)

- tensione nel tratto parabolico iniziale del diagramma parabolico rettangolare: $\sigma_c = f_c \left(\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2} \right)$;
- deformazione ultima:

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035 \quad \text{per pura compressione} \quad \varepsilon_{cu}^* = \varepsilon_{c2} = 0,002$$

- valore di calcolo della resistenza cilindrica:

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} \quad \alpha_{cc} = 0,85 \quad \gamma_c = 1,5$$

- acciaio (fig 2); f_c

- tensione nel tratto iniziale del diagramma: $\sigma_s = f_s \cdot \varepsilon_s$;
- punto snervamento: $f_{yk} = f_s \cdot \varepsilon_{sy}$;
- valori di calcolo per tensioni di snervamento e di rottura:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad f_{td} = k_s \cdot f_{yd}$$

Con $\gamma_s = 1,15$ e $k_s = \left(\frac{f_t}{f_s} \right)^k$ rapporto di sovrarresistenza.

Nel seguito ci si riferisce, dandoli per nota, ai 6 campi limitati dai meccanismi di collasso (fig 3).

Compressione semplice (fig 4):

- premessa: baricentro dell'armatura e baricentro del calcestruzzo coincidenti. Equilibrio alla trazione:

$$N_u = \sigma_c' \cdot A_c' + \sigma_s' \cdot A_s'$$

$$\text{Con } \varepsilon = \varepsilon_{cu}^* \Rightarrow \sigma_c' = \sigma_c(\varepsilon_{cu}^*) \quad \text{e} \quad \sigma_s' = \sigma_s(\varepsilon_{cu}^*)$$

- si calcolano i valori di calcolo delle resistenze di calcestruzzo e acciaio e le corrispondenti deformazioni:

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c}, \quad \varepsilon_{cu}^* = 0,002 \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \Rightarrow \varepsilon_{sy} = \frac{f_{yd}}{f_s}, \quad \varepsilon_{su} = 0,010$$

- ma per il calcestruzzo che per l'acciaio la deformazione è la stessa per la perfetta aderenza delle barre al calcestruzzo. La deformazione massima è pertanto ε_{cu}^* . Si ricavano i valori di tensione per calcestruzzo e acciaio in base allo stato deformativo:

$$\varepsilon_c' = \varepsilon_{cu}^* = 0,002 \Rightarrow \sigma_c' = f_{cd}$$

$$\varepsilon_c' = \varepsilon_{cu}^* \text{ da confrontare con } \varepsilon_{sy} \begin{cases} \text{se } \varepsilon_{cu}^* > \varepsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon_{cu}^* < \varepsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = f_s \cdot \varepsilon_{cu}^* \end{cases}$$

- si calcola il valore ultimo dello sforzo axiale di compressione e lo si confronta con lo sforzo axiale agente sulla struttura:

$$N_u = \sigma_c' \cdot A_c' + \sigma_s' \cdot A_s'$$

$$N_E \leq N_u$$

Trazione semplice (fig 5):

- premessa: baricentro dell'armatura e baricentro del calce stesso coincidenti. Equilibrio alla trazione:

$$N_u = \sigma_s \cdot A_s$$

$$\text{con } \epsilon = \epsilon_{su} \Rightarrow \sigma_s = \sigma_s(\epsilon_{su})$$

- si calcolano la tensione nell'acciaio e la corrispondente deformazione:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$\epsilon_{sy} = f_{yd} / \epsilon_s, \quad \epsilon_{su} = 0,01$$

- si considera $\epsilon_{su} = 0,01$ e si calcola il valore ultimo dello sforzo di trazione, da confrontare con lo sforzo axiale agente sulla struttura:

$$N_u = \sigma_s \cdot A_s$$

$$N_E \leq N_u$$

Flessione semplice (retta - fig 6):

- premessa: il collasso per flessione retta può avvenire in tre campi:

- campo ②: $0 < \epsilon_c' < \epsilon_{cu} \Rightarrow 0 \leq \frac{y_m}{d} \leq \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{su}}$

- campo ③: $\epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{su} \Rightarrow \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{su}} \leq \frac{y_m}{d} \leq \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sy}}$

- campo ④: $0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \Rightarrow \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sy}} \leq \frac{y_m}{d} \leq 1$

- dopo aver ricavato i valori di calcolo per le resistenze e le corrispondenti deformazioni (calcestruzzo e acciaio) si assume, come primo tentativo, che il collasso avvenga in corrispondenza della traccia AB che ripete i campi ② e ③:

$$\frac{y_m}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{su}} \Rightarrow y_m \Rightarrow \epsilon_s' = \epsilon_c' \cdot \frac{y_m - d'}{y_m} \text{ da confrontare con } \epsilon_{sy}$$

$$\Rightarrow \text{se } \epsilon_s' > \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = f_{yd}; \text{ se } \epsilon_s' < \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = E \cdot \epsilon_s'$$

Dalla parte base l'acciaio presenta $\epsilon_s = \epsilon_{su} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd}$,

- si impone l'equilibrio alla rotazione sottraendo l'integrale sul calcestruzzo con un'espressione coerente un pare, metro β . Esso modifica opportunamente il prodotto $\sigma_c' A_c'$,

che esprime la compressione "rettangolare":

$$-\int_{A_c'} \sigma_c(y) da_c' - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = -R, \quad \beta = \frac{F_c'}{F_c} = \frac{\int_{A_c'} \sigma_c(y) \cdot da_c'}{\sigma_c' A_c'}$$

$$\Rightarrow \int_{A_c'} \sigma_c(y) da_c' = \beta \sigma_c' A_c' \Rightarrow -\beta \sigma_c' A_c' - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = R$$

Deve essere $R=0$. Il coefficiente β si ottiene usando la formula approssimata $\beta \approx (1,6 - 0,8 \frac{E_c'}{E_{cu}}) \cdot \frac{E_c'}{E_{cu}}$. Se si ottiene $R=0$ il procedimento è concluso e y_m era la vera posizione dell'asse neutro. Altrimenti bisogna iterare;

- se $R < 0$ il collasso avviene sicuramente in campo (2), se $R > 0$ in campo (3) o (4) (più probabilmente in campo (3)). Si sceglie un nuovo y_m (ad esempio $\frac{y_m}{2}$ se $R < 0$ o $\frac{3}{2} y_m$ se $R > 0$);

Se $R < 0$ si hanno:

$$E_s = E_{su} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \Rightarrow E_c' = E_s \cdot \frac{y_m}{d - y_m} \Rightarrow \sigma_c' = f_{cd} \cdot \left(2 \frac{E_c'}{E_{cu}} - \frac{E_c'^2}{E_{cu}^2} \right)$$

$$E_s' = E_c' \cdot \frac{y_m - d'}{y_m} \Rightarrow \sigma_s' = E \cdot E_s'$$

Si calcola β e si risolve $-\beta \sigma_c' A_c' - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = R$. Se $R=0$ si è giunti al risultato finale e y_m era la posizione effettiva dell'asse neutro, se $R \neq 0$ bisogna riprovare un'altra volta. Si può usare l'interpolazione lineare (se $R > 0$) per ottenere una nuova y_m abbastanza vicina a quella che dà lo zero;

- se $R > 0$ si hanno (ipotizzando che il collasso avvenga in campo (3)):

$$E_c = E_{cu} \Rightarrow \sigma_c = f_{cd} \Rightarrow E_s = E_c' \cdot \frac{d - y_m}{y_m} > E_{sy} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd}$$

$$E_s' = E_c' \cdot \frac{y_m - d'}{y_m} \Rightarrow \sigma_s' = E \cdot E_s'$$

Ancora una volta si usa l'equilibrio alla trazione $-\beta \sigma_c' A_c' - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = R$. Se $R=0$ si conclude, se $R < 0$ il collasso avviene sicuramente in campo (3) e si può usare l'interpolazione lineare per determinare la nuova y_m con cui rifare tutti i conti. Se $R > 0$ può essere conveniente valutare la R' in corrispondenza della traccia BC che separa i campi (3) e (4). Se tale nuova R' è negativa si usa l'interpolazione lineare e si prosegue come sempre. Se è negativa il collasso avviene in campo (4).

$$E_c = E_{cu} \Rightarrow \sigma_c = f_{cd} \Rightarrow E_s = E_c' \cdot \frac{d - y_m}{y_m} < E_{sy} \Rightarrow \sigma_s = E \cdot E_{sy}$$

$$E_s' = E_c' \cdot \frac{y_m - d'}{y_m} \Rightarrow \sigma_s' = E \cdot E_s'$$

□

Anche qui si inseriscono i valori nell'equazione $-\beta A_c \sigma_c' + \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = R$ e si valuta R . Se $R=0$ y_m è il valore reale, altrimenti si deve proseguire ancora una volta con l'iterazione;

- noto y_m è possibile concludere l'analisi calcolando il valore del momento di classe della sezione. C'è tuttavia un ultimo problema. Soppoeremo l'equilibrio alla rotazione intorno a M_u :

$$\int_{d_{ac}} \sigma_c(y) y dA_c' + \sigma_s' A_s' (y_m - d') + \sigma_s A_s (d - y_m) = M_u$$

Non è possibile risolvere facilmente l'integrale. Si introduce allora un altro coefficiente, K' :

$$K' = \frac{S_c}{y_m A_c'} = \frac{\int_{d_{ac}} \sigma_c(y) y dA_c'}{y_m \int_{d_{ac}} \sigma_c(y) dA_c'} \Rightarrow \int_{d_{ac}} \sigma_c(y) y dA_c' = K' y_m \int_{d_{ac}} \sigma_c(y) dA_c'$$

$$\Rightarrow \int_{d_{ac}} \sigma_c(y) y dA_c' = K' y_m \beta \sigma_c' A_c'$$

In cui $K' \cong 0,67 - 0,07 \frac{\sigma_c'}{\sigma_{cu}}$ (approssimativamente). Inoltre si usa anche il coefficiente $K = 1 - K' = 0,33 + 0,07 \frac{\sigma_c'}{\sigma_{cu}}$. Si ottiene così M_u e si esegue la verifica!

$$M_E \leq M_u$$

Forza assiale eccentrica o flessione composta (limitandosi al caso di forza lungo l'asse y):

- premessa: data la presenza di una coppia di sollecitazioni è necessario definire un dominio di rottura. A rigore esso sarebbe una curva continua. Le nostre analisi di casi discreti danno invece origine a una linea spezzata. Vediamo tre famiglie di tracce limite;
- I famiglia: trazione semplice o pura flessione con piccola e_c centrata (Caso 1 - fig 7);
- II famiglia: collasso lungo la traccia AA' (deformazione uniforme - fig 8):

$$\text{distanza tra } G \text{ geometrico e } G_s \text{ dell'acciaio: } e_g = \frac{-A_s' y_s' + A_s y_s}{A_s + A_s'}$$

$$\Rightarrow y_s', y_s$$

In questo caso l'epce non indica il ferro compresso, ma solo quello superiore in trazione. Lo ha poi

$$E = E_{cu} = 0,01 \Rightarrow \sigma_s = \sigma_s' = f_{yd} \Rightarrow N_u = \sigma_s A_s + \sigma_s' A_s'$$

La distanza del baricentro geometrico dal centro di sollecitazione è e_g poiché la forza è applicata nel baricentro

bro geometrico dell'acciaio. Il momento ultimo ne calcolerò rispetto al baricentro geometrico:

$$e = e_g + e_s = e_g \Rightarrow M_u = N_u \cdot e$$

- collasso lungo la braccia AO (deformazione nulla al lembo superiore - fig 9):

$$E_s = E_{su} = 0,01 \Rightarrow \sigma_s = f_{yd}, \quad E'_s = E_{su} \frac{d'}{d} \text{ da confrontare con } E_{sy}$$

$$\Rightarrow \text{se } E'_s > E_{sy} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd}, \text{ se } E'_s < E_{sy} \Rightarrow \sigma'_s = E'_s \cdot E_s$$

Imponendo l'equilibrio:

$$N_u = \sigma_s A_s + \sigma'_s A'_s$$

Questa volta l'eccentricità è data da e_g (calcolata come nel caso precedente) sommata a e_s fornito dal problema:

$$e = e_s + e_g \Rightarrow M_u = N_u \cdot e$$

- II famiglia: flessione semplice o forza assiale eccentrica (di trazione o di compressione) con grande eccentricità (applicata lungo l'asse $y = \text{fig 10}$)

- premessa: il collasso può avvenire in quattro campi:

$$\text{Campo } \textcircled{2} \quad E_s = E_{su}, \quad 0 \leq E'_c \leq E_{cu} \Rightarrow 0 \leq \frac{y_m}{d} \leq \frac{E_{cu}}{E_{cu} + E_{su}}$$

$$\text{Campo } \textcircled{3} \quad E_{sy} \leq E_s \leq E_{su}, \quad E'_c = E_{cu} \Rightarrow \frac{E_{cu}}{E_{cu} + E_{su}} \leq \frac{y_m}{d} \leq \frac{E_{cu}}{E_{sy} + E_{cu}}$$

$$\text{Campo } \textcircled{4} \quad 0 \leq E_s \leq E_{sy}, \quad E'_c = E_{cu} \Rightarrow \frac{E_{cu}}{E_{cu} + E_{sy}} \leq \frac{y_m}{d} \leq 1$$

$$\text{Campo } \textcircled{5} \quad -E_{cu} \frac{e}{d} \leq E_s \leq 0, \quad E'_c = E_{cu} \Rightarrow 1 \leq \frac{y_m}{d} \leq 1 + \frac{e}{d}$$

Con l'equilibrio alla trazione otteniamo la forza N_u :

$$N_u = \beta \cdot \sigma'_c \cdot A'_c + \sigma'_s \cdot A'_s - \sigma_s \cdot A_s$$

Con l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro otteniamo y_c , distanza del centro di sollecitazione dall'asse neutro stesso:

$$y_c = \frac{\beta \cdot \sigma'_c \cdot A'_c \cdot k' y_m + \sigma'_s \cdot A'_s (y_m - d') + \sigma_s \cdot A_s \cdot (d - y_m)}{N_u}$$

Usando i già noti coefficienti β e k' . Inoltre:

$$u = y_c - y_m \Rightarrow e = u + y_g = y_c - y_m + y_g \Rightarrow M_u = N_u \cdot e$$

- collasso lungo la braccia AB (calcestruzzo compresso e acciaio tesi giungono contemporaneamente ai propri limiti di deformazione - fig 11):

$$E'_c = E_{cu}, \quad E_s = E_{su} \Rightarrow \sigma'_c = f_{cd}, \quad \sigma_s = f_{yd} \Rightarrow y_m = d \frac{E_{cu}}{E_{cu} + E_{su}}$$

$$\Rightarrow E'_s = E'_c \frac{y_m - d'}{d}$$

A questo punto si confronta E'_s con E_{sy} . Se $E'_s < E_{sy}$, allora $\sigma_s = E'_s \cdot E_s$.

lora $\sigma_s' = \epsilon_s' \cdot E_s$, altrimenti, se $\epsilon_s' > \epsilon_{sy}$, $\sigma_s' = f_{yd}$. Si calcolano poi $\beta = 0,8$ e $k' = 0,6$ (valide nei campi 3 e 4 e nelle braccia che li delimitano) e si ricavano N_u e y_c dalle equazioni di equilibrio viste nella premessa. Quindi si determina e, dalla cui conoscenza si ottiene M_u .

- collando lungo la braccio BC (calcestruzzo compresso al massimo accorciamento, acciaio teso allo snervamento - fig 12):

$$\epsilon_c' = \epsilon_{cu}, \epsilon_s = \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_c' = f_{cd}, \sigma_s = f_{yd} \Rightarrow y_m = d \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sy}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_s' = \epsilon_c' \frac{y_m - d'}{y_m}$$

Se $\epsilon_s' > \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = f_{yd}$, se $\epsilon_s' < \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = \epsilon_s' \cdot E_s$. Anche qui, usando $\beta = 0,8$ e $k' = 0,6$, si calcolano:

$$N_u \Rightarrow y_c \Rightarrow u = y_c - y_m \Rightarrow e = u + y_g \Rightarrow M_u = N_u \cdot e$$

- collando lungo la braccio OB (calcestruzzo compresso al massimo accorciamento, acciaio al limbo inferiore con deformazione nulla - fig 13):

$$\epsilon_c' = \epsilon_{cu}, \epsilon_s = 0 \Rightarrow \sigma_c' = f_{cd}, \sigma_s = 0 \Rightarrow y_m = d$$

$$\Rightarrow \epsilon_s' = \epsilon_c' \frac{y_m - d'}{y_m}$$

Se $\epsilon_s' > \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = f_{yd}$, se $\epsilon_s' < \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = \epsilon_s' \cdot E_s$. Ancora una volta, con $\beta = 0,8$ e $k' = 0,6$ si ottengono N_u , y_c , u , e ed infine M_u .

- collando lungo la braccio OB (calcestruzzo compresso al massimo accorciamento, acciaio al limbo inferiore compresso, calcestruzzo al limbo inferiore con deformazione nulla - fig 14):

$$\epsilon_c' = \epsilon_{cu}, \epsilon_{cb} = 0 \Rightarrow \sigma_c' = f_{cd}, \sigma_{cb} = 0 \Rightarrow y_m = h$$

$$\Rightarrow \epsilon_s' = \epsilon_c' \frac{h - d'}{h} \quad \epsilon_s = \epsilon_c' \frac{d - h'}{h}$$

Se $\epsilon_s' (\text{e } \epsilon_s) > \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' (\text{e } \sigma_s) = f_{yd}$; se $\epsilon_s' (\text{e } \epsilon_s) < \epsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_s' = \epsilon_s' \cdot E_s$, $\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s$. Con $\beta = 0,8$ e $k' = 0,6$ calcoliamo N_u , questa volta dato da termini tutti positivi: $N_u = \beta \sigma_c' k' + \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s$. Come di consueto otteniamo y_c , u , e ed infine M_u .

- famiglia: compressione semplice o presso flessione compressa eccentricata (campo 6 - fig 15):

- legami tra le deformazioni:

calcestruzzo alle due estremità: $\epsilon_c' - \epsilon_{cu}^* = \frac{\epsilon_{cu}^* - \epsilon_{cb}^*}{\alpha}$

con $\epsilon_{cu}^* \leq \epsilon_c' \leq \epsilon_{cu}$ e $0 \leq \epsilon_{cb}^* \leq \epsilon_{cu}^*$; $\alpha = h \frac{\epsilon_c'}{\epsilon_c' + \epsilon_{cb}^*}$, $\beta = h - d$

acciaio integralmente compresso: $\epsilon_s' = \epsilon_{cu}^* + \epsilon_c' \frac{\alpha - d'}{\alpha}$; $\epsilon_s = \epsilon_{cu}^* - \epsilon_{cb}^* \frac{d - \alpha}{h - \alpha}$

- si ottengono le tensioni:

$$\sigma_c = \sigma_c(\epsilon_c) \quad \text{se } \epsilon_c = \epsilon_{ca} \text{ o } \epsilon_c = \epsilon_{ca}^* \Rightarrow \sigma_c = f_{cd}$$

altrimenti $\sigma_c = f_c \left(2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} - \frac{\epsilon_c^2}{\epsilon_{c2}^2} \right)$

$$\sigma_s = \sigma_s(\epsilon_s), \quad \sigma_s = \sigma_s(\epsilon_s) \quad \text{con le consuete osservazioni (confronto di } \epsilon_s' \text{ e } \epsilon_s \text{ con } \epsilon_{sy})$$

- si impongono gli equilibri alla trazione e alla rotazione intorno all'asse passante per il baricentro geometrico G:

$$\int_{A_c} \sigma_c(y) da_c + \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = N_u$$

$$\int_{A_c} \sigma_c(y) \cdot y \cdot da_c + \sigma_s' A_s' \cdot y_s' - \sigma_s A_s y_s = M_u = N_u \cdot e, \quad e = \frac{M_u}{N_u}$$

Si introducono anche in questo caso due coefficienti β'' e k'' :

$$\beta'' = \frac{F_c'}{F_c^*} = \frac{\int_{A_c} \sigma_c(y) da_c}{\sigma_c' A_c'}$$

$$k'' = \frac{S_c'}{h \cdot F_c'} = \frac{\int_{A_c} \sigma_c(y) \cdot y da_c}{h \cdot \int_{A_c} \sigma_c(y) da_c}$$

$$\Rightarrow F_c' = \beta'' \sigma_c' A_c'$$

$$\Rightarrow S_c' = F_c' \cdot k'' \cdot h = \beta'' \sigma_c' A_c' \cdot k'' \cdot h$$

Con $\beta'' \cong 0,8 + 0,2 \frac{\epsilon_{cb}}{\epsilon_{cu}^*}$ e $k'' \cong 0,1 \left(1 - \frac{\epsilon_{cb}}{\epsilon_{cu}^*} \right)$. Si ottengono:

$$\beta'' \sigma_c' A_c' + \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = N_u$$

$$\beta'' \sigma_c' A_c' k'' \cdot h + \sigma_s' A_s' y_s' - \sigma_s A_s y_s = M_u = N_u \cdot e$$

- collando lungo la breccia DE (calcestruzzo soggetto a deformazione ϵ_{cu}^* , comune anche a tutto l'acciaio - fig 16):

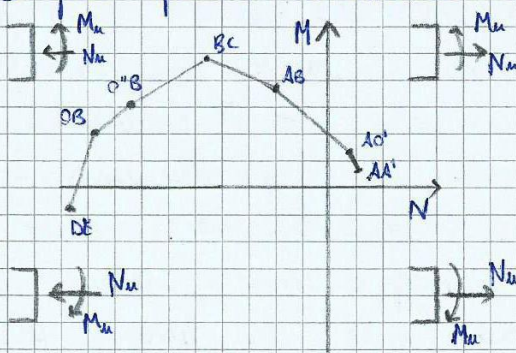
$$\epsilon_c = \epsilon_s = \epsilon_s = \epsilon_{cu}^* = 0,002 \Rightarrow \sigma_c = f_{cd}, \quad \sigma_s' = \sigma_s = f_{yd}$$

$$\epsilon_{cb} = \epsilon_{cu}^* \Rightarrow \sigma_{cb} = f_{cd}$$

Lungo questa breccia $\beta'' = 1$ e $k'' = 0$:

$$\begin{cases} M_u = \beta'' \sigma_c' A_c' + \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s \\ M_u = \beta'' \sigma_c' A_c' k'' \cdot h + \sigma_s' A_s' y_s' - \sigma_s A_s y_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_u \\ M_u \end{cases} \Rightarrow e = \frac{M_u}{N_u}$$

- bisogna controllare i segni delle sollecitazioni ottenute, eventualmente cambiandoli se essi non rispettano l'usuale convenzione. Si può quindi tracciare il dominio di rottura (almeno in parte):



È un esempio qualitativo. Bisognerebbe ripetere l'intero esercizio per ottenere l'altro metà del dominio. A ogni modo, una volta conclusa la studio, sono accettabili le coppie di azioni N, M che ricadono all'interno o sulla frontiera del dominio.

Le flessione semplice, la compressione semplice e la trazione semplice che causano il collasso possono essere ottenuti, in maniera approssimata, per interpolazione lineare dei valori estremi dei segmenti che tagliano gli assi.

Duttilità (fig. 17, fig. 18):

- premesse:

$$\text{asse neutro: } y_m = d \cdot \frac{\epsilon_c'}{\epsilon_c' + \epsilon_s}$$

$$\text{curvatura: } \chi = \frac{1}{R} = \frac{\epsilon_c' + \epsilon_s}{d}$$

$$\text{duttilità: } \mu_x = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

Negli esercizi si cercano i punti notevoli del diagramma $M-X$ (1, 2, 3, 4) e un sottoinsieme di tali punti (di solito il 2 di primo snervamento e il 4 di rottura). Si traccia quindi il diagramma $M-X$ come mostrato.

- flessione semplice (eterneo a x - fig. 19):

- si analizza il comportamento a collasso che fornisce i valori di ϵ_c' , ϵ_s' , ϵ_s , σ_c' , σ_s' , σ_s , y_m e M_u . Si può quindi determinare la curvatura ultima:

$$\chi_u = \frac{\epsilon_c' + \epsilon_{su}}{d}$$

- per trovare la curvatura di primo snervamento è necessario la deformazione ϵ_c' associata alla tensione σ_c' che causa lo snervamento. La si può ottenere iterativamente sfruttando l'equazione di equilibrio alla trazione. Si suppone un valore di ϵ_c' , ad esempio $\epsilon_c' = \epsilon_{cu} = 0.0035$:

$$\sigma_c' = f_{cd} \Rightarrow y_m = d \cdot \frac{\epsilon_c'}{\epsilon_c' + \epsilon_s} \Rightarrow \epsilon_s' = \epsilon_c' \frac{y_m - d}{y_m}$$

In cui $\epsilon_s = \epsilon_{sy}$ poiché stiamo studiando la condizione di primo snervamento. Si confronta ϵ_s' con ϵ_{sy} per determinare σ_s' . Esempio $\epsilon_c' = \epsilon_{cu}$:

$$\beta = 0,8 \Rightarrow R = -\beta \sigma_c' A_c' - \sigma_s' A_s + \sigma_s A_s$$

- se $R=0$ la deformazione supposta era esatta e si possono calcolare momento e curvatura di primo snervamento. Se $R < 0$ bisogna iterare diminuendo il valore di ϵ_c' in modo che l'equazione si annulli. Ciò grazie alla diminuzione del valore dei contributi negativi dipendenti da ϵ_c' stesso, cioè $-\beta \sigma_c' A_c'$ e $-\sigma_s' A_s$.
- si continua in questo modo finché R diviene pressoché

nulla di quel punto si calcolano:

$$k' = 0,67 - 0,07 \frac{E_c}{E_{cu}} \Rightarrow M_y = \beta \sigma_c' A_c k' y_m + \sigma_s' A_s (y_m - d) + \sigma_s A_s (d - y_m)$$

Il valore di M_y deve essere inferiore a quello di M_u . Si determinano infine la curvatura e la duttilità:

$$\chi_y = \frac{E_c' + E_s}{d} \quad \mu_x = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

Spesso si usano valori di E_{cu} e E_{su} maggiori di quelli usati nel calcolo a rottura;

- flessione composta (N lungo y - fig. 19):

- il procedimento è iterativo come quello della flessione semplice, ma si cerca l'ubensazione con la retta $N = N_u$, non con $N = 0$. Poiché $R = N_u$;
- se si è già svolta l'analisi a flessione retta ci si può aiutare con l'interpolazione lineare per ammorbidire già in partenza il valore cercato;
- si ricavano:

$$\beta \Rightarrow N \Rightarrow y_c \Rightarrow u = y_c - y_m \Rightarrow l = u + y_g \Rightarrow M_y = N \cdot e < M_u$$

- si calcola la duttilità:

$$\chi_u = \frac{E_{cu} + E_{su}}{d}, \quad \chi_y = \frac{E_c' + E_{su}}{d} \Rightarrow \mu_x = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

Instabilità dell'equilibrio:

- premessa: la snellezza dell'elemento in analisi deve essere compresa tra due valori:

$$l_1 \leq l \leq l_2$$

Con $l_2 = 140$ e $l_1 = \max\left(25, \frac{15}{\sqrt{f_c}}\right)$, con $\nu = \frac{N e d}{I_c f_{cd}}$. Se $l < l_1$ l'elemento è grosso e giunge a classes per rottura. Se $l > l_2$ è consigliato l'uso dell'elemento che possiede una snellezza troppo elevata (fig. 20);

- metodo della colonna-modello: se ci troviamo nel campo $l_1 \leq l \leq l_2$ si può usare questo metodo per verificare la stabilità della colonna, supporta incastata alla base e libera in sommità. Supponiamo inoltre di avere una forza P di compressione applicata con eccentricità e e una forza orizzontale F diretta verso destra (fig. 21);

- il momento alla base è $M = P \cdot e + F \cdot l$. L'eccentricità alla base risulta $e = M/N = M/P$;

- il metodo prevede la rotazione dei momenti del \square

I e del III ordine:

$$M_I = N \cdot e_I = N \cdot (e_0 + e_a + e_c) \quad M_{II} = N \cdot e_{II} = N \cdot a$$

- momento del I ordine: l'eccentricità ed esso associata e la somma di tre contributi. Il primo è l'eccentricità alla base delle colonne $e_0 = e = M/N = M/p$ (per m^2 o primo). Il secondo è l'eccentricità associata alle imperfezioni geometriche:

$$e_a = \frac{\theta l_0}{2} \quad \text{con } \theta = \max\left(\frac{1}{200}, \frac{1}{200\theta}\right)$$

θ è l'inclinazione accidentale dell'elemento rispetto alla verticale. Infine il terzo contributo è l'eccentricità dovuta agli effetti secondari, dipendente dalle due precedenti:

$$e_c = (e_0 + e_a) \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \eta\right) - 1 \right] \quad \text{con } \alpha = \frac{N}{N_a}, \quad \eta = 2 \div 3$$

η è il coefficiente di riduzione del calcestruzzo. N_a è il carico critico euleriano, come di consueto dato da:

$$N_a = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_0^2}$$

Per valutare E del calcestruzzo:

$$f_{cm} = f_{cd} + 8 \Rightarrow f_{cm} = 22000 \left(\frac{f_{cd}}{40}\right)^{0.3} \Rightarrow f_{cd} = \frac{f_{cm}}{1.2} = E$$

resistenza cilindrica con $f_{cd} = 1,2$

Si ottiene quindi $M_I = N \cdot e_I = N(e_0 + e_a + e_c)$

- momento del II ordine: si assume che la colonna abbia deformata sinusoidale:

$$v(x) = a \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l_0}\right) \right], \quad v(l) = a; \quad v(0) = 0$$

La derivata seconda di $v(x)$ dà la curvatura:

$$\frac{1}{r} = v''(x) = a \cdot \frac{\pi^2}{l_0^2} \Rightarrow a = \frac{l_0^2}{2 \cdot \pi^2}$$

Si assume $\frac{1}{r} = \frac{2 E \sigma_s}{\eta} = \frac{2 f_{yd}}{\eta \cdot E_s} = \frac{2 f_{yd}}{220 \cdot E_s}$. Si ottiene quindi

$$e_{II} = a, \quad \text{da cui } M_{II} = N \cdot e_{II} = N \cdot a.$$

- momento totale:

$$M = M_I + M_{II}$$

- per la verifica si usano diagrammi di rottura grafici (caratterizzati da)

$$\text{ascissa } \nu = \frac{N}{b h \cdot f_{cd}} \quad \text{ordinata } \mu = \frac{M}{b h^2 f_{cd}}$$

percentuale di armatura $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}} = \omega'$

ci fornisce le curve del dominio di rottura corrispondenti al caso in cui avviene. Si controlla poi che il punto di coordinate (ν, μ) ricada all'interno di tale dominio.

Taglio e flessione:

- premessa: si fa uso del traliccio di Ritter-Morsch, che conduce alle seguenti espressioni di taglio-trazione e taglio-compressione (fig. 22):

$$T_{cu} = f_c b \bar{y} \sin^2 \theta [cbg\theta + cbg\beta] \quad T_{cs} = \frac{\sigma_s \cdot A_s \cdot \bar{y} \sin \beta [cbg\theta + cbg\beta]}{s}$$

Da queste due formule generali discendono quelle particolari relative ai ferri piegati ($\theta = 45^\circ, \beta = 45^\circ$) e alle staffe ($\theta = 45^\circ, \beta = 90^\circ$).

- nota la resistenza di calcolo del calcestruzzo f_{cd} si valuta la resistenza di calcolo a taglio-compressione del CLS:
 - per barre piegate: $T_{cu,p} = f_{ctb} \bar{y}$
 - per staffe: $T_{cu,s} = \frac{1}{2} f_{ctb} \cdot \bar{y}$
 - mischi staffe-barre piegate: $T_{cu} = p \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \bar{y}$

Con p parametro che tiene conto del fatto che solitamente lo sforzo di compressione sulle barre di CLS è maggiore di quello stimato col traliccio di Morsch ($p \leq 95$). $f_{cd} = 0,5 f_{cd}$, come da normativa;

- nota la funzione di riarrangiamento di calcolo dell'acciaio f_{yd} si valuta la resistenza di calcolo a taglio-trazione:

- per le barre piegate: $T_{tds,p} = \frac{\sqrt{2} f_{yd} \cdot A_{s,p} \cdot \bar{y}}{s}$

- per le staffe: $T_{tds,s} = \frac{f_{yd} \cdot A_{s,s} \cdot \bar{y}}{s}$

Completamente, se mischi barre piegate e staffe la resistenza di calcolo a taglio-trazione risulta:

$$T_{tds} = T_{tds,p} + T_{tds,s}$$

- si determina il valore ultimo dello sforzo di taglio supportabile per la trave:

$$T_{red} = \min\{T_{tdc}, T_{tds}\}$$

- ne segue la verifica di resistenza:

$$T_{Ed} \leq T_{red}$$

- se è presente uno sforzo di compressione agente sulla trave la resistenza a taglio-compressione cambia. Si modifica allora T_{cd} per il fattore α_c dato da:

$$\alpha_c = 1 + \frac{\bar{\sigma}_{cp}}{f_{cd}} \quad \text{per } 0 \leq \frac{\bar{\sigma}_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,25$$

$$\alpha_c = 1,25 \quad \text{per } 0,25 \leq \frac{\bar{\sigma}_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,50$$

$$\alpha_c = 2,5 \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{cp}}{f_{cd}} \right) \quad \text{per } 0,50 \leq \frac{\bar{\sigma}_{cp}}{f_{cd}} \leq 1$$

Con $\bar{\sigma}_{cp}$ tensione di compressione media agente sulla sezione:

$$\bar{\sigma}_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c}$$

N_{Ed} valore di calcolo dello sforzo normale di compressione.

Analisi a rottura - grafici e figure

Modelli costitutivi:

Fig 1 - CALCESTRUZZO

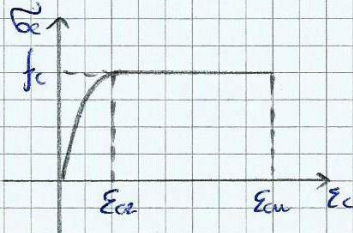
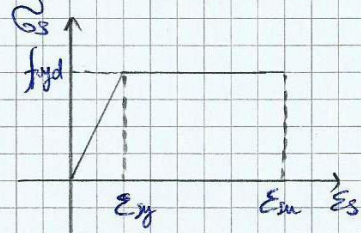
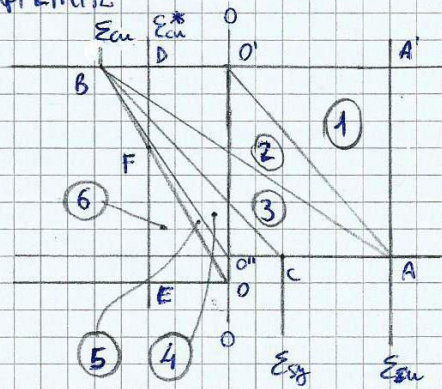
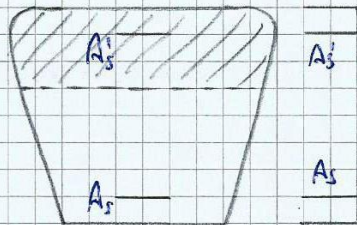


Fig 2 - ACCIAIO



Meccanismi di collasso e campi limite:

Fig 3 - CAMPI LIMITE



Distribuzioni sulle sezioni:

Fig 4 - COMPRESSIONE SEMPLICE

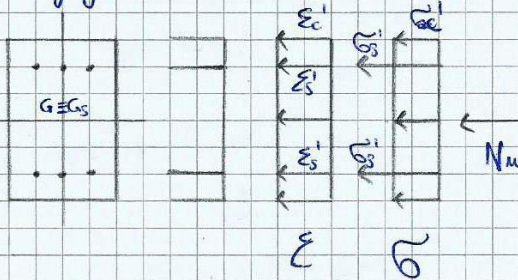


Fig 5 - TRAZIONE SEMPLICE

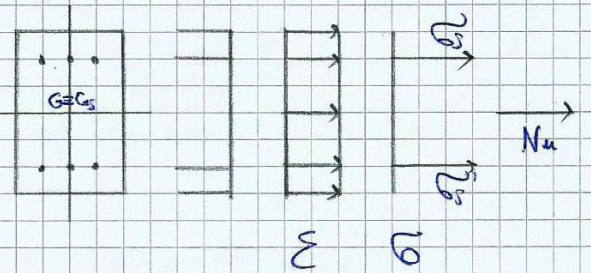


Fig 6 - FLESSIONE SEMPLICE

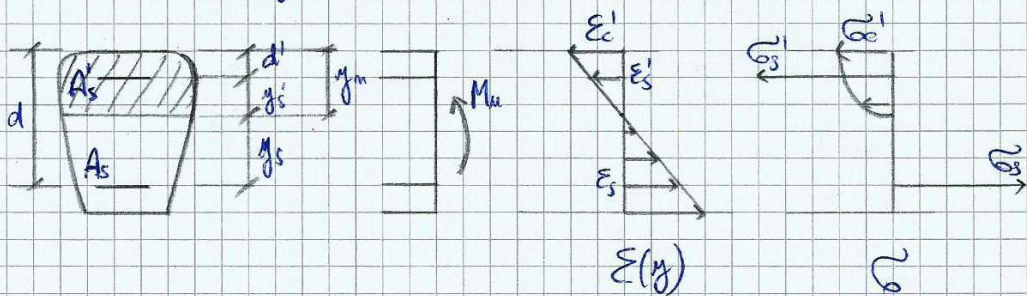


Fig. 7 - TRAZIONE SEMPLICE E TENSO-FLESSIONE CON PICCOLA ECCENTRICITÀ

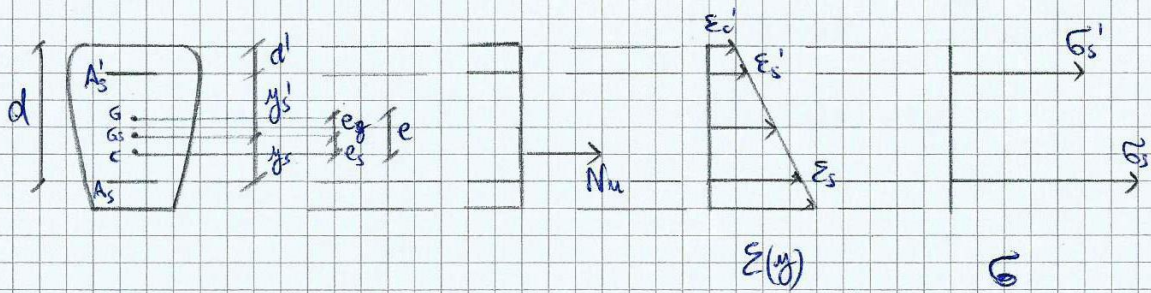


Fig. 8 - TRACCIA A-A'

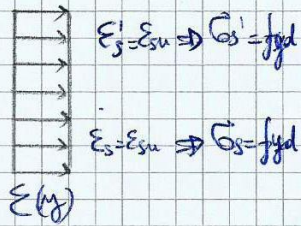


Fig. 9 - TRACCIA A-O'

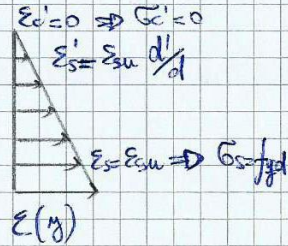


Fig. 10 - FLESSIONE SEMPLICE O FORZA ASSIALE ECCENTRICA (DI TRAZ. O DI COMPR.) CON GRANDE ECCENTRICITÀ

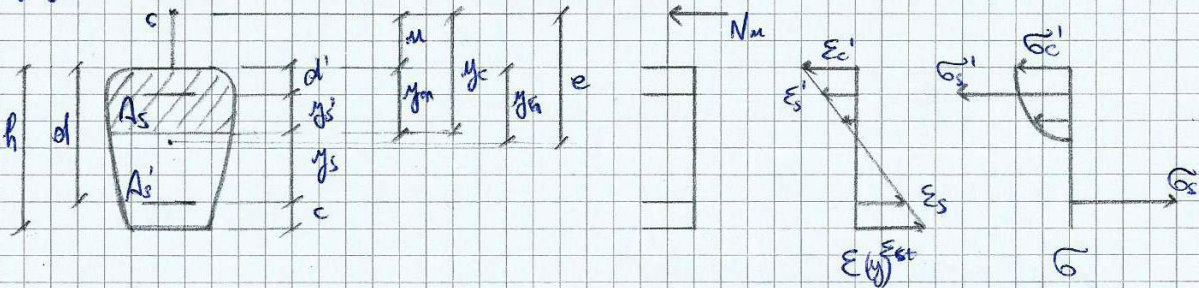


Fig. 11 - TRACCIA AB

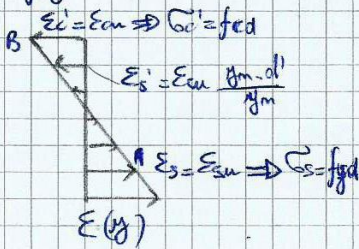


Fig. 12 - TRACCIA BC

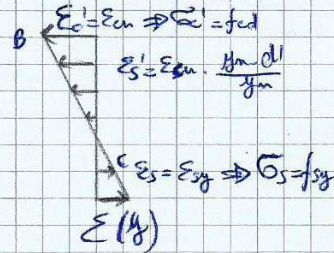


Fig. 13 - TRACCIA O'B

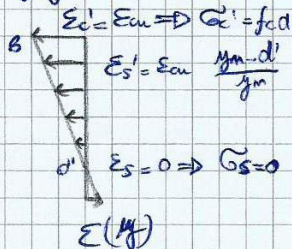


Fig. 14 - TRACCIA OB

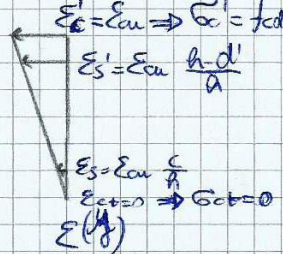


fig 15 - COMPRESSIONE SEMPLICE E PRESSO-FLESSIONE CON PICCOLA ECCENTRICITÀ

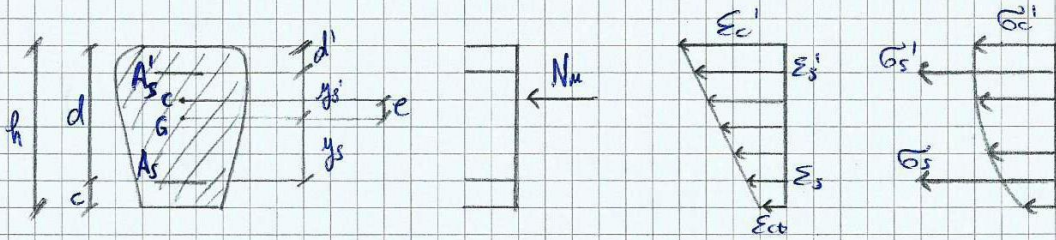
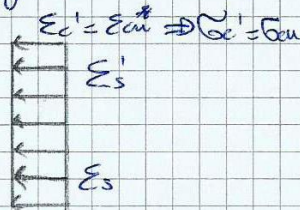


fig 16 - TRACCIA DE



Duttilità;

fig 17 - CURVATURA

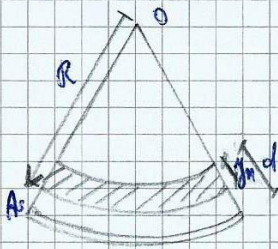


fig 18 - DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA

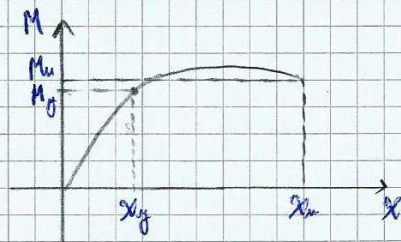


fig 19 - SEMPLIFICAZIONE DEL DIAGRAMMA M-χ (fig. 18)

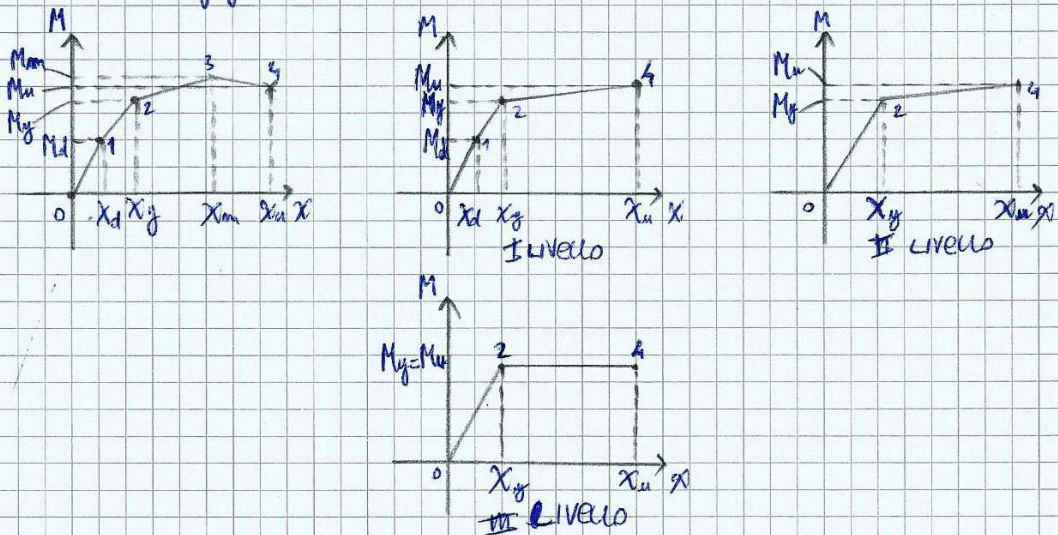
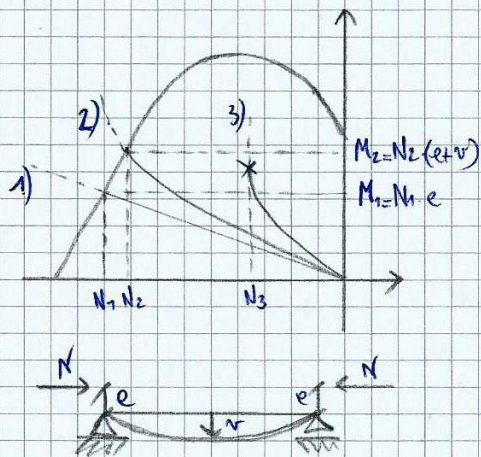


Fig. 20 - DOMINIO DI ROTTURA



Caso 2) : $l_1 \leq l \leq l_2$
 \Rightarrow colonna modello

Fig. 21 - METODO DELLA COLONNA MODELLO

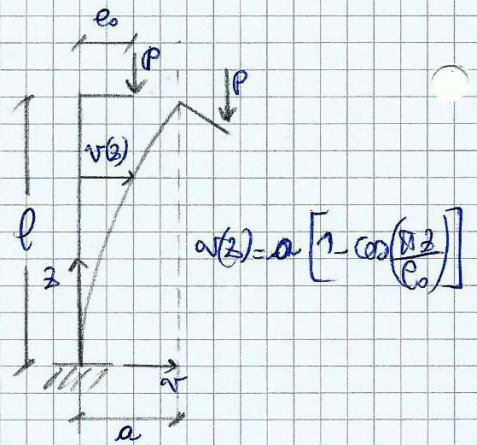


Fig. 22 - TRALICCIO DI RITTER-MORSCH

